Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 1

1. Sean R y S relaciones n-arias en el conjunto A. Demuestre las leyes de De Morgan

$$\sim (R \cup S) = (\sim R) \cap (\sim S) \text{ y } \sim (R \cap S) = (\sim R) \cup (\sim S).$$

2. Sean R, S y P relaciones n-arias en el conjunto A. La implicación $R \to S$ entre las relaciones R y S es $(\sim R) \cup S$. Demuestre que $R \to (P \to S) = (R \cap P) \to S$ y $(R \to P) \to S = (\sim R \to S) \cap (P \to S)$.

3. Encuentre ejemplos de relaciones binarias no vacías P, R, S en $\mathbb{N}$ tales que $R \to (P \to S) = (R \to P) \to S$.

4. Sea R una relación de equivalencia en el conjunto A. Usamos las notaciones siguientes: $[a] = \{b \in A | aRb\}$ y $A/R = \{[a] | a \in A\}$. Sea además $*$ una operación de grupo sobre A. ¿En qué condiciones se tiene que $\otimes$ es una operación de grupo sobre A/R, donde $[a] \otimes [b] = [a * b]$?

5. Un conjunto A es *finito* si $A = \emptyset$ o si existen $n \in \mathbb{N}$ y $f : \{0, \ldots, n\} \to A$ tal que $A = \{f(0), \ldots, f(n)\}$ — de lo contrario es *infinito*. Un conjunto A es *enumerable* si $A = \emptyset$ o si existe $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $A = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ — de lo contrario es *no enumerable*. Demuestre que todo subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable y que para todo subconjunto infinito B de un conjunto enumerable existe una biyección $f : \mathbb{N} \to B$.

6. Sea $\mathcal{F} = \{n, c, d\}$, donde $I = \{p_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{[,], \neg, \wedge, \vee\}$, y

$$n(x) = [\neg x], c(x, y) = [x \wedge y], d(x, y) = [x \vee y].$$

   Sea PL el conjunto $cl_{\mathcal{F}}(B)$, donde B es el conjunto de todas las palabras de la forma p_n. PL es el conjunto de las *sentencias proposicionales*. Describa en detalle $\mathcal{F}^3(B)$.

7. Demuestre que dada cualquier $\varphi \in PL$, no se puede tener simultáneamente $\varphi = [A \wedge B]$ y $\varphi = [C \vee D]$, para ningún $A, B, C, D \in PL$.

8. Arme tablas de verdad para las siguientes sentencias:

   (a) Si no ventea o no llueve, entonces llueve pero no ventea.

(b) Si x no es divisible por 5 a menos que sea divisible por 7, entonces x es divisible por 7 a menos que sea divisible por 5.

(c) $(((A \to B) \to A) \to A)$.

9. El señor K se dirige a una isla de caballeros y rufianes. Los caballeros siempre dicen la verdad, y los rufianes siempre mienten. Se encuentra con dos personas A y B.

   (a) A dice: "En cualquier caso el otro es un rufián". ¿Quiénes son A y B?

   (b) A dice: "Soy un rufián y B es un caballero." ¿Qué es cada uno de ellos?

10. El señor K se encuentra con tres personas A, B y C. El señor K le pregunta a A: "¿Ustedes son caballeros o rufianes?" A contesta algo, pero el señor K no oye muy bien. Entonces el señor K le pregunta a B: "¿Qué dijo A?" y B contesta "A dijo que éramos rufianes." En ese momento C entra en el diálogo y dice "No le crea a B - ¡está mintiendo!". ¿Qué son B y C?

11. Los dos problemas anteriores son adaptados del libro de R. Smullyan "What is the name of this book?" ¿Cuál es, finalmente, el nombre del libro de Smullyan?