Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática

Tarea 2

1. Demuestre que la exponenciación $c(n, m) = n^m$, las funciones constantes $C_k(n) = k$ y la resta truncada $x \dot{-} y$ son p.r., y dé el árbol de construcción de esas funciones.

2. Muestre que $\text{máx}(x, y) = x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$. Concluya.
   Muestre que $\text{mín}(x, y) = y \dot{-} (y \dot{-} x) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$. Concluya.

3. Demuestre que si f es una función n-aria p.r., entonces la relación $\{(\vec{x}, y) | f(\vec{x}) = y\}$ es p.r. ¿Cuándo se tiene el converso?

4. Demuestre que el conjunto de las funciones p.r. es enumerable.

5. Sea $g(x, y) = (\mu z \leq f(x, y))(h(y, z) = 0)$, donde f y h son funciones p.r. Claramente g es p.r. - pero en este caso dé el argumento en todo detalle.

6. Demuestre que dada una relación de equivalencia p.r. E, todas las clases son conjuntos p.r. ¿Por qué no vale el converso?

7. Sean $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y U un conjunto, tales que $f : U \times U \to U$ y $g : U \to U$. Sean V un conjunto y F, G, R funciones $F : V \times V \to V$, $G : V \to V$ y $R : B \to V$, con $B \subset U$. Sea $C = \text{cl}_{\mathcal{F}}(B)$. Considere el caso en que uno define una función $h : C \to V$ mediante las siguientes ecuaciones:
   $h(x) = R(x)$ si $x \in B$; de lo contrario $h(f(x, y)) = F(h(x), h(y))$ y $h(g(x) = G(h(x))$. Sabemos por lo visto en clase que estos términos son necesarios para definir la función h. Demuestre que es suficiente para la existencia de h que f y g sean inyectivas en C y que los conjuntos imagen $f[C^2]$ y $g[C]$ sean disyuntos.