

Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 3

1. Demuestre que π es una biyección p.r. de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} .
2. Demuestre que las siguientes funciones son p.r.:
 - a) $D(x)$ = el número de factores primos de x .
 - b) $\phi(n) = |\{[x] \in \mathbb{Z}/n \mid (x, n) = 1\}|$; dado n , $\phi(n)$ cuenta cuántos números naturales relativamente primos a x , menores que x , hay.
3. Demuestre que la función $f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$ es una biyección p.r. de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} . Demuestre que existen proyecciones p.r. g y h tales que $f(g(x), h(x)) = x$, $g(f(x, y)) = x$, $h(f(x, y)) = y$.
4. Demuestre que la función $\exp(n, m)$ es p.r.

5. Dado $i \in \mathbb{N}$, sea

$$r_i = (-1)^{\exp(i,0)} \cdot \frac{\exp(i,1)}{1 + \exp(i,2)}.$$

Entonces $\mathbb{Q} = \{r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que la suma y la multiplicación en racionales son p.r., y que existen funciones p.r. f y g tales que $r_i + r_j = r_{f(i,j)}$ y $r_i \cdot r_j = r_{g(i,j)}$.

6. Sean g, g' funciones p.r., y sean $a, a' \in \mathbb{N}$. Defina las funciones f y f' mediante la siguiente recursión cruzada: $f(0) = a$, $f(n+1) = g(n, f'(n))$ y $f'(0) = a'$, $f'(n+1) = g'(n, f(n))$. Demuestre que f y f' son p.r.
7. ★ Sea g una función p.r. Defina la siguiente función f : $f(0, x) = g(x)$, $f(n+1, x) = f(n, f(n, x))$. Demuestre que f es p.r.
8. Calcule la forma normal disyuntiva de las siguientes fórmulas proposicionales

$$(((A \vee B) \rightarrow C) \wedge B)$$

$$((A \leftrightarrow \neg B) \vee (C \rightarrow A))$$