Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 4

1. Demuestre las siguientes propiedades de la función de Ackermann:

   a) $y < A_x(y)$

   b) $A_x(y) < A_x(y+1)$

   c) $A_x(y+1) \leq A_{x+1}(y)$

   d) $A_x(y) < A_{x+1}(y)$.

2. Demuestre que para todo $x, y > 1$ se tiene:

   a) $A_x(z) + A_y(z) < A_2(A_{x+y-1}(z))$

   b) $A_x(z) + A_y(z) < A_{x+y}(z)$.

3. Demuestre que para toda función p.r. $f(x_1, \ldots, x_n)$ existe un número m tal que $f(x_1, \ldots x_n) < A_m(x_1 + \ldots + x_n)$, para todo $x_1, \ldots, x_n$. Concluya que la función de Ackermann A_∞ no puede ser p.r.

4. Demuestre que la función de Ackermann A_∞ es recursiva.

5. Demuestre que un conjunto A es recursivamente enumerable si y solo si existe una función recursiva f tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \exists m(f(n, m) = 0)\}.$$

6. Sean A un conjunto recursivamente enumerable y f una función recursiva. Demuestre que los conjuntos $\{f(n) | n \in A\}$ y $\{n | f(n) \in A\}$ son recursivamente enumerables.

7. Demuestre que todo conjunto infinito recursivamente enumerable contiene un conjunto infinito recursivo.

8. Sea $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ con $A_n \subset \mathbb{N}$ tal que el conjunto $\{\pi(n, m) | n \in A_m\}$ es recursivamente enumerable. Demuestre que A es recursivamente enumerable.