Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 5

1. Escriba una sentencia que es verdadera si y solo si existen infinitos números primos p tales que $p + 2$ también es primo.

2. Estudie la validez de $\mathbb{N} \models \varphi(4,5)$ o $\mathbb{N} \models \varphi(5,4)$, donde $\varphi(v_1, v_2)$ es la fórmula

   a) $\exists v_5\big((v_5 + v_2) = v_1\big)$

   b) $\exists v_3(v_3 \cdot 14 = 81)$

   c) $\forall v_3 \exists v_4(v_3 \cdot 24 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_4)$.

3. *a*) Demuestre que $\mathbb{N} \models \neg\exists v_n \varphi\langle s\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \forall v_n \neg\varphi\langle s\rangle$.

   b) Demuestre que $\mathbb{N} \models \neg(\varphi \wedge \psi)\langle s\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)\langle s\rangle$.

4. Demuestre que

$$\mathbb{N} \models \exists x\big(\varphi(x, \vec{y}) \wedge \psi(\vec{y})\big)\langle s\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \big(\exists x \varphi(x, \vec{y}) \wedge \psi(\vec{y})\big)\langle s\rangle,$$

   donde x no ocurre libre en ψ.

5. Demuestre que $\mathbb{N} \models \varphi(t(\vec{y}), \vec{y})\langle s\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \exists x\big(x = t(\vec{y}) \wedge \varphi(x, \vec{y})\big)\langle s\rangle$.

6. $\star$ Demuestre que existe un conjunto infinito r.e. no recursivo cuya intersección con todo conjunto infinito recursivamente enumerable es no vacía.

7. Encuentre una fórmula φ tal que $\{s | \mathbb{N} \models \varphi\langle s\rangle\}$ sea el conjunto $\{s | s(n+2) = s(n) + s(n+1)$ para todo $n \leq 100\}$.

8. Sea $R(x, \vec{y})$ una relación aritmética. Demuestre que las relaciones

$$P(\vec{y}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x R(x, \vec{y})$$

   y

$$S(\vec{y}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x R(x, \vec{y})$$

   son aritméticas.

9. Esboce una demostración de “el conjunto de las relaciones aritméticas es enumerable”. Dé el inicio de construcción de una relación que no sea aritmética.

10. Demuestre que la imagen $f(A)$ y la preimagen $f^{-1}(A)$ de un conjunto aritmético por una función aritmética $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son aritméticas.