Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 6

1. Sea $\{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos no vacíos, tal que la relación $\{(i, j) | j \in A_i\}$ es aritmética. Demuestre que existe una "función de elección" aritmética f tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

2. Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ es *casi periódico* si existen $m, p \in \mathbb{N}$ tales que $n \in A \iff n + p \in A$, para todo $n > m$. Demuestre que todo conjunto casi periódico es aritmético.

3. Encuentre palabras con números de Gödel 1080 y 6930.

4. Demuestre que la relación $\{(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) | \varphi$ es una subfórmula de $\psi\}$ es p.r.

5. (Este es el *Teorema del punto fijo de Gödel*:) Sea $\varphi(x)$ una fórmula de la aritmética. Demuestre que existe una sentencia ψ tal que $\mathbb{N} \models \psi \iff \mathbb{N} \models \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$. Ayuda: mire la demostración del teorema de Tarski.

6. Sea $\mathcal{A}$ es sistema axiomático cuyo único axioma es la sentencia $\mathbf{n} \approx \mathbf{n}$ y con reglas de deducción $\varphi \rightsquigarrow [\varphi \vee \psi]$, $\psi \rightsquigarrow [\varphi \vee \psi]$ y $(\varphi, \psi) \rightsquigarrow [\varphi \wedge \psi]$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es válido.

7. Demuestre que el sistema $\mathcal{A}$ del problema anterior es efectivo.

8. Encuentre una sentencia verdadera que no sea un teorema del sistema $\mathcal{A}$ de los dos problemas anteriores.

9. Demuestre que el conjunto de los teoremas del sistema $\mathcal{A}$ de los tres problemas anteriores es p.r.

10. Construya un sistema axiomático que sea (a) efectivo y válido, (b) efectivo y completo, (c) completo y válido.