

Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 7

1. Sea $L = \{R\}$, con $\#(R) = 2$. Sea \mathcal{M} una L -estructura tal que $M = \mathbb{N}$ y $R^{\mathcal{M}}(m, n) \iff n + 1 = m$. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son válidas en \mathcal{M} ?

- a) $\forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$
 b) $\forall v_0 \exists v_1 R(v_1, v_0)$
 c) $\forall v_0 \forall v_1 (\neg v_0 = v_1 \rightarrow (R(v_0, v_1) \vee R(v_1, v_0)))$.

2. Sea $L = \{R\}$, con $\#(R) = 2$. Una L -estructura \mathcal{M} es un *conjunto densamente ordenado* si es modelo de las siguientes sentencias, que forman la *teoría de conjuntos densamente ordenados*:

- $\forall v_0 \neg R(v_0, v_0)$
 $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((R(v_0, v_1) \wedge R(v_1, v_2)) \rightarrow R(v_0, v_2))$
 $\forall v_0 \forall v_1 (R(v_0, v_1) \vee R(v_1, v_0) \vee v_0 = v_1)$
 $\forall v_0 \forall v_1 (R(v_0, v_1) \rightarrow \exists v_2 (R(v_0, v_2) \wedge R(v_2, v_1)))$
 $\exists v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$.

Demuestre que el universo de todo conjunto densamente ordenado es infinito.

3. Sea $L = \{\sim\}$, con $\#(\sim) = 2$. Arme una L -teoría T cuyos modelos sean L -estructuras \mathcal{M} tales que $\sim^{\mathcal{M}}$ es una relación de equivalencia. ¿Cuáles modelos de T son también modelos de las siguientes sentencias:

- a) $\exists v_0 \exists v_1 (\neg v_0 = v_1 \wedge \forall v_3 (v_3 \sim v_0 \vee v_3 \sim v_1))$?
 b) $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 \sim v_1 \rightarrow v_0 = v_1)$?

4. ¿Cuáles pares de modelos, entre $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, $\langle [0, 1], < \rangle$ y $\langle (0, 1) \mathbb{R}, < \rangle$, son isomorfos entre sí?
5. Sean \mathcal{M} y \mathcal{M}' L -modelos y π un isomorfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$. Demuestre que si t es un L -término y s es una evaluación en \mathcal{M} entonces

$$\pi t^{\mathcal{M}} \langle s \rangle = t^{\mathcal{M}'} \langle \pi \circ s \rangle.$$

Demuestre que si φ es una L -fórmula y s es una función de evaluación en \mathcal{M} entonces $\mathcal{M} \models \varphi(s)$ si y solo si $\mathcal{M}' \models \varphi(\pi \circ s)$. Concluya que modelos isomorfos satisfacen las mismas sentencias.

6. Construya un modelo de la teoría

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((R(v_0, v_1) \wedge R(v_1, v_2)) \rightarrow R(v_0, v_2)) \\ \forall v_0 \neg R(v_0, v_0) \\ \forall v_0 R(f(v_0), v_0). \end{array} \right.$$

7. Construya una sentencia que sea válida en $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ pero no lo sea en $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

8. a) Demuestre que la sentencia $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (R(v_0, v_1) \vee \neg R(v_0, v_2))$ es válida.

b) Demuestre que la sentencia $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (R(v_0, v_1) \vee \neg R(v_2, v_0))$ no es válida.

9. Decida si la sentencia $\exists x R(x)$ es consecuencia lógica de la teoría $\{\forall x (R(x) \rightarrow P(x)), \neg \forall x P(x)\}$.

10. ¿Los siguientes conjuntos de sentencias son consistentes o contradictorios?

a) $\{p_0 \vee p_1, p_1 \rightarrow p_0\}$.

b) $\{\neg p_0 \rightarrow p_1, \neg(p_1 \rightarrow p_0), \neg p_0\}$.

c) $\{(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2, (p_1 \vee p_2) \rightarrow p_0, (p_2 \vee p_0) \rightarrow p_1, (p_0 \vee p_1) \vee p_2, \neg((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2)\}$.

11. Un conjunto de sentencias proposicionales T es *independiente* si el conjunto $\{\neg A\} \cup (T \setminus \{A\})$ es consistente, para todo $A \in T$. Demuestre que si todo subconjunto finito de T es independiente, entonces T también lo es.

12. Un conjunto de sentencias proposicionales T es *finitamente consistente* si todo subconjunto finito de T es consistente. T es *completo* si para toda sentencia proposicional A se tiene que $A \in T$ o $(\neg A) \in T$. Demuestre que un conjunto finitamente consistente siempre se puede extender a un conjunto finitamente consistente completo de sentencias.