

Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 8

1. Sea $E = \{0, 1\}^P$ el espacio de todas las valuaciones (topología producto). Si A es una sentencia proposicional, sea $U(A)$ el conjunto $\{v | v(A) = 1\}$. Demuestre:

- $U(A)$ es abierto, para toda sentencia proposicional A .
- $U(A)$ es cerrado, para toda sentencia proposicional A .
- Si T es un conjunto de sentencias finitamente satisficible entonces en el conjunto $\{U(A) | A \in T\}$ los subconjuntos finitos tienen intersección no vacía.
- La intersección $\bigcap_{A \in T} U(A)$ es no vacía (use que E es compacto, por el teorema de ТИХОНОВ). Concluya que si $v \in \bigcap_{A \in T} U(A)$, se tiene que $v(A) = 1$ para toda $A \in T$.

(Lo anterior es una demostración topológica del Teorema de Compacidad para el Cálculo Proposicional.)

2. Construya un modelo en el lenguaje $\{R, S, f, g, c, d\}$ para la teoría

$$\{R(c, d), S(f(c)), R(g(f(c), c), g(d, d))\}.$$

3. Sean $L = \{c, f\}$ y $T = \{\neg(c = fc), ffc = c\}$. Dé un ejemplo de una valuación que respete la igualdad v tal que $v(T) = 1$ y construya el modelo de términos \mathcal{M}_v .
4. Demuestre que las siguientes sentencias son cuasi-tautologías pero no son tautologías:

- $\neg R(c, fd) \vee \neg d = e \vee R(c, fe)$
- $(c_1 = c_2 \wedge c_2 = c_3 \wedge c_3 = c_4) \rightarrow c_4 = c_1$.

5. Demuestre que todo modelo canónico es isomorfo a un modelo de términos.

6. Una L -fórmula φ es una *sentencia de Horn* si es de la forma

$$\forall x_1 \dots \forall x_n ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$$

o de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$, donde $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$ son fórmulas atómicas y ψ es una fórmula atómica a negación de atómica. Demuestre que si T es un conjunto de sentencias de Horn y T tiene modelo entonces T tiene modelo canónico.

7. Sea T un conjunto de sentencias de Horn y $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ ($1 \leq i \leq n$) fórmulas atómicas tales que

$$T \models \exists x_1 \dots \exists x_m (\varphi_1(x_1, \dots, x_m) \vee \dots \vee \varphi_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Demuestre que existen términos t_1, \dots, t_m e índices i tales que $T \models \varphi_i(t_1, \dots, t_m)$.