Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 11

1. $P \models \forall x(\neg(x = \mathbf{0}) \to \exists y(y \oplus \mathbf{1} = x))$.
2. Demuestre sin usar completitud que $P \vdash \forall x(\neg(x = \mathbf{0}) \to \exists y(y \oplus \mathbf{1} = x))$.
3. Demuestre que en el lenguaje $\{R\}$, $\#(R) = 1$, la teoría
$$\{\exists x \forall y(R(x) \wedge (R(y) \to y = x)),$$
$$\exists x \forall y\Big(\neg R(x) \wedge (\neg R(y) \to y = x)\Big)\}$$
es completa.
4. Demuestre que en el lenguaje $\{R\}$, $\#(R) = 2$, la teoría
$$\{\exists x \exists y(R(x, y) \wedge \neg x = y), \exists x \exists y \neg R(x, y), \forall x R(x, x)\}$$
es incompleta.
5. Demuestre que en el lenguaje $\{R\}$, $\#(R) = 2$, la teoría
$$\begin{cases} \forall x R(x, x) \\ \forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x)) \\ \forall x \forall y \forall z\Big((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)\Big) \end{cases}$$
(la teoría de las relaciones de equivalencia) es incompleta.
6. ($\star$) Demuestre que la teoría del ejercicio anterior se vuelve completa si se agregan las sentencias
$$\forall x \forall y_0 \ldots \forall y_n \exists z\Bigg(\Big(R(x, y_0) \wedge \ldots \wedge R(x, y_n)\Big) \to$$
$$\Big(R(x, z) \wedge \neg y_0 = z \wedge \ldots \wedge \neg y_n = z\Big)\Bigg)$$
$$\exists y_0 \ldots \exists y_n\Big(\neg R(y_0, y_1) \wedge \ldots \wedge \neg R(y_0, y_n) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \neg R(y_{n-1}, y_n)\Big)$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea DLO_1 la teoría de órdenes lineales densos - como DLO pero sin el axioma $\forall x \exists y \exists z (R(y,x) \wedge R(x,z))$. Demuestre que DLO_1 es incompleta.

8. ($\star$) Sea DLO_2 la teoría DLO_1 agregándole el axioma

$$\exists x \exists y \exists z \Big(\big(x = z \vee R(x,z) \big) \wedge \big(y = z \vee R(z,y) \big) \Big).$$

   Demuestre que DLO_2 es completa y DLO_1 es decidible.

9. ($\star$) Demuestre que los modelos $(\mathbb{R}, <)$ y $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, <)$ son elementalmente equivalentes pero no son isomorfos.

10. Sea L un lenguaje que contiene los símbolos de constante $c_1, \ldots, c_{100}$. Demuestre que las L-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son elementalmente equivalentes si $M = \mathbb{R}$, $c_j^{\mathcal{M}} = \sqrt{2\pi j}$ $(1 \leq j \leq 100)$ y

    a) $N = \mathbb{R}$, $c_j^{\mathcal{N}} = 2^{-j}$ $(1 \leq j \leq 100)$.
    b) $N = \mathbb{N}$, $c_j^{\mathcal{N}} = j$ $(1 \leq j \leq 100)$.