Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 12

1. Sean $L = \{<\}$ y $L' = \{\leq\}$, con $\#(<) = \#(\leq) = 2$. Si $\mathcal{M}$ es un L-modelo, sea $\mathcal{M}'$ un L'-modelo, con $M' = M$ y

$$\leq^{\mathcal{M}'} = \{(a,b) | (a,b) \in <^{\mathcal{M}} \text{ o } a = b\}.$$

Demuestre que para toda L-sentencia φ existe una L'-sentencia φ' tal que para todo $\mathcal{M} \models DLO_1$ se tiene

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{M}' \models \varphi'.$$

2. Demuestre que la relación ternaria

$$Q = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 | a + b = c\}$$

no es definible en $(\mathbb{N}, \cdot)$. Ayuda: recuerde que relaciones definibles son invariantes bajo automorfismos - encuentre un automorfismo Φ de $(\mathbb{N}, \cdot)$ tal que $\Phi(Q) \neq Q$.

3. Demuestre que $\mathbb{N}$ es definible en el modelo $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$. Concluya que $\leq$ es definible en $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$. Haga lo mismo pero reemplazando $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{R}$ (es más fácil para $\mathbb{R}$ que para $\mathbb{Z}$).

4. Demuestre que $\mathbb{R}$ **no** es definible en $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.

5. Sea *DisLO* la teoría con los siguientes axiomas:

   a) $\forall x \neg x < x$
   b) $\forall x \forall y \forall z (x < y < z \to x < z)$
   c) $\forall x \forall y (x = y \lor x < y \lor y < x)$
   d) $\forall x \exists y (x < y \land \neg \exists z (x < z < y)$
   e) $\forall x \exists y (y < x \land \neg \exists z (y < z < x)$

   Demuestre que dado cualquier orden lineal $(A, <)$ el modelo $A \times \mathbb{Z}$ con orden lexicográfico satisface *DisLO*, y que todo modelo de *DisLO* es isomorfo a un modelo de la forma $A \times \mathbb{Z}$ para algún $(A, <)$.

6. Encuentre una teoría completa que tenga exactamente cuatro modelos contables no isomorfos. (Idea: use $DLO^{+} = DLO + \{c_1 > c_2, c_2 > c_3, \ldots\}$ y agregue un predicado unario P al lenguaje - y agregue axiomas que garanticen que los elementos que satisfacen P y los que no lo satisfacen son ambos densos.)

7. Sea $L = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Sea $T = \{c_i \neq c_j | i < j < \omega\}$.

    a) Demuestre que T tiene $\aleph_0$ modelos contables no isomorfos. (Idea: dado un modelo $\mathcal{M}$, considere $M \setminus \{c_1^{\mathcal{M}}, c_2^{\mathcal{M}}, \ldots\}$.)

    b) Demuestre que existe un modelo contable de T en el cual se pueden sumergir elementalmente todos los modelos contables de T.

    c) Concluya que T es una teoría completa.