Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 9

1. Sean $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ L-sentencias. Demuestre que $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \theta\}$ es contradictorio ssi $\varphi_0 \to (\varphi_1 \to (\ldots \to (\varphi_{n-1} \to \neg\theta)\ldots))$ es válida.

2. Suponga que la L-sentencia φ es consecuencia lógica de la L-teoría T. Demuestre que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ tales que la sentencia $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ es válida.

3. Sea T una L-teoría tal que en toda L-estructura al menos una $\varphi \in T$ vale. Demuestre que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ tales que la sentencia $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ es válida.

4. Sea $L = \{R\}$, con $\#(R) = 2$. Decimos que el modelo $\mathcal{M}$ es *bien fundamentado* si no existen $a_1, \ldots, a_n, \ldots \in M$ tales que $R^{\mathcal{M}}(a_{n+1}, a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que no existe ninguna L-teoría cuyos modelos sean exactamente todas las L-estructuras bien fundamentadas.

5. Si $\varphi(x)$ es una fórmula de la teoría de números, entonces
$$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models \exists x\varphi(x) \to \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to x \leq y)).$$
(Aunque debería ser claro lo anterior, explique por qué.) Deduzca a partir de aquí que si $\mathcal{M}$ es un modelo no estándar de la aritmética y $\varphi(x)$ es una fórmula de la aritmética tal que $\mathcal{M} \models \varphi(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande, entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ para algún $a \in M$ infinito.

6. Demuestre que dado un conjunto (contable) A, y dado un orden parcial $\leq$ sobre A, existe $\leq' \supset \leq$ tal que $\leq'$ ordena linealmente a A.

7. ($\star$) Sea φ una sentencia en el lenguaje $L = \{0, +\}$ que vale en todos los grupos abelianos divisibles libres de torsión. Demuestre que para todo (salvo finitos) primo p, φ vale en el grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ de orden p.
   Nota: un grupo abeliano G es divisible si para todo entero $n > 0$,
$$G \models \forall x \exists y(ny = x),$$
   donde ny abrevia $\underbrace{y + \ldots + y}_{n}$. G es libre de torsión si para todo $n > 0$,
$$G \models \forall x(nx = 0 \to x = 0).$$