Universidad Nacional de Colombia - Lógica Matemática
Tarea 13

1. Sea $L = \{\oplus, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ y fije una L-fórmula φ. Sean

$$\begin{cases} A = \{\ulcorner\varphi\urcorner | P \vdash \varphi\} \\ B = \{\ulcorner\varphi\urcorner | P \vdash \neg\varphi\}. \end{cases}$$

   Demuestre que A y B son *recursivamente inseparables*, es decir, no existe ningún conjunto recursivo R tal que $A \subset R$ y $R \cap B = \emptyset$.

2. Sea L un lenguaje que contenga el conjunto $\{\oplus, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Sea T una L-teoría que puede demostrar los axiomas de P. Demuestre que si T es recursivamente axiomatizable, entonces T es indecidible e incompleta.

3. Sean L un lenguaje, $\mathcal{M}_n$ L-estructuras (para $n \in \mathbb{N}$) tales que $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{M}_n \subset \ldots$, y sea $\mathcal{M}_\infty = \bigcup_n \mathcal{M}_n$. Suponga que $Th(\mathcal{M}_n) = Th(\mathcal{M}_m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Muestre (con un ejemplo) que **no necesariamente** se tiene que $Th(\mathcal{M}_\infty) = Th(\mathcal{M}_0)$.

4. Sean $L, \mathcal{M}_n, \mathcal{M}_\infty$ como en el ejercicio anterior, pero suponga ahora adicionalmente que

$$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{M}_n \prec \ldots$$

   Demuestre que en este caso sí se tiene que $Th(\mathcal{M}_\infty) = Th(\mathcal{M}_0)$ - y aún más: $\mathcal{M}_n \prec \mathcal{M}_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.
   a) Sea A un orden lineal, $A' \subset A$. Demuestre que $A' \times \mathbb{Z} \prec A \times \mathbb{Z}$ (ver Tarea 12).

   b) Encuentre dos modelos **no isomorfos** $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models DisLO$ tales que $\mathcal{M}_1$ se puede sumergir elementalmente en $\mathcal{M}_2$ y viceversa.